2022年浙江省选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

《高等数学》参考答案

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上

选择题部分

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 不能答在试题卷上。

一、选择题（每个小题给出的选项中，只有一项符合要求：本题共有5个小题，每小题4分，共20分）

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ e^x, & x\ge 0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　　)间断点。

A.连续点　B.可去间断点　C.跳跃间断点　D.无穷间断点

答案：A

解析：$f(0)=e^0=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以选A。

2.当 $x\to0$ 时，$\ln(1+ax^2)$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则 $a=(\quad)$。

A. -1　B. $-\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D.1

答案：C

解析：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2}{\frac{1}{2}x^2}=2a$，由于 $\ln(1+ax^2)$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{1-\cos x}=1$，因此 $2a=1,a=\dfrac{1}{2}$。

3.下列选项错误的是(　　)

A. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$

B. $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 必可导

C. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值和最小值

D. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$f(x)$ 在 $x=x_0,x_0\in(a,b)$ 处取得极值，则

8. 函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=1+t^2\\y=\cos t\end{cases}$所确定，则$\dfrac{dy}{dx}=$______.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\cos t)'}{(1+t^2)'}=\dfrac{-\sin t}{2t}$。

9. 设函数$f(x)=\begin{cases}\int_0^x(t^2-2t-3)dt, x\ge 0\\x^2, x<0\end{cases}$，则$f(x)$在$x=$___ 处取得极小值

解：当$x<0$时，$f'(x)=(x^2)'=2x<0$，$f(x)$单调递减；

当$x>0$时，$f'(x)=\left[\int_0^x(t^2-2t-3)dt\right]'=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，

令$f'(x)=0$得$x_1=-1$(舍去)、$x_2=3$，$x=0$时$f'(x)$不存在，所以

	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

所以在$x=3$处取得极小值。

10. 定积分$\int_0^1 x(1-x)^2dx=$____.

解：原式$=\int_0^1 x\cdot(1-2x+x^2)dx=\int_0^1(x-2x^2+x^3)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{x^4}{4}\right]_0^1=\dfrac{1}{12}$。

11. 函数$y=y(x)$由方程$\ln y-xy^2=1$所确定，则$dy=$____.

解：两边同时求导得：$\dfrac{1}{y}y'-y^2-2xyy'=0$，整理得：$y'=\dfrac{y^3}{1-2xy^2}$，所以

$dy=\dfrac{y^3}{1-2xy^2}dx$。

12. 瑕积分$\int_0^1\dfrac{1+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$_____.

解：原式$\underline{\underline{令t=\sqrt{x}}}\int_0^1\dfrac{1+\cos t}{t}\cdot 2tdt=2\int_0^1(1+\cos t)dt=2\left[1+\sin t|_0^1\right]=2(1+\sin 1)$。

13. 曲线$y=\dfrac{x^2+x+1}{3-x}$的垂直渐近线是________.

解：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+1}{3-x}=\infty$，所以垂直渐近线是 $x=3$。

14. 已知$\sin x$是函数$f(x)$的一个原函数，则$\int xf(x)dx=$______.

解：$\int xf(x)dx=\int x\cdot(\sin x)'dx=\int xd\sin x=x\cdot\sin x-\int\sin xdx=x\cdot\sin x+\cos x+C$。

15. 曲线$y=x^3+e^x$在点$(0,1)$处的切线方程为_________.

解：$y'=(x^3+e^x)=3x^2+e^x$，所以 $k_{切}\big|_{x=0}=0+e^0=1$，

切线方程为：$y-1=1\cdot(x-0)$，即 $y=x+1$。

三、计算题（本题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分。）

16. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x\sin x}$.

解：$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$。

17. 设函数$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$，求$f'(x)$，$f^{(4)}(0)$.

解：$f'(x)=[x(x+1)(x+2)(x+3)]'=(x+1)(x+2)(x+3)+x[(x+1)(x+2)(x+3)]'$，

$f'(0)=(0+1)(0+2)(0+3)+0=1\cdot 2\cdot 3=6$。

$f^{(4)}(x)=[x(x+1)(x+2)(x+3)]^{(4)}=[x^4+6x^3+11x^2+6x]^{(4)}=(x^4)^{(4)}=4!=24$，

因此 $f^{(4)}(0)=24$.

18. 求不定积分$\int\dfrac{1}{\sqrt{x-5}+1}dx$.

解：$\int\dfrac{1}{\sqrt{x-5}+1}dx\xlongequal{令t=\sqrt{x-5}}\int\dfrac{1}{t+1}\cdot 2tdt=2\int\dfrac{t}{1+t}dt=2\int\dfrac{t+1-1}{t+1}dt$

$=2\int\left(1-\dfrac{1}{1+t}\right)dt=2(t-\ln|1+t|)+C=2\left(\sqrt{x-5}-\ln\left(\sqrt{x-5}+1\right)\right)+C$。

19. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, x\ge 0\\ -x^2, x<0\end{cases}$，问$f(x)$在$x=0$处是否连续？是否可导，请说明理由.

解：① $f(0)=0^2=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$；$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2)=0$，由于

$f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

② $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=0$；

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(x)=0$；

由于 $f'_+(0)=f'_-(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

20. 计算定积分 $\int_{-2}^{2}(\frac{\sin^7 x}{1+x^6}+x^2e^{|x|})dx$.

解：$\int_{-2}^{2}\left(\dfrac{\sin^7 x}{1+x^6}+x^2e^{|x|}\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(x^2e^{|x|}\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(x^2e^{x}\right)dx=2\int_{0}^{2}x^2de^{x}$

$=2\left(x^2\cdot e^x\Big|_0^2-\int_0^2 e^x\cdot 2xdx\right)=2\left(4e^2-2\int_0^2 e^x\cdot xdx\right)=8e^2-4\left[x\cdot e^x\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx\right]$

$=8e^2-4\left(2e^2-e^x\Big|_0^2\right)=8e^2-8e^2+4(e^2-1)=4(e^2-1)$。

21. 求过点A(2,1,2)且垂直于直线 $\begin{cases}x+y+z=0\\x-2y-z+1=0\end{cases}$ 的平面方程

解：已知直线方向向量为

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\-2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=\{1,2,-3\},$$

即所求平面的法向量为 $\{1,2,-3\}$，又已知平面过点 $A(2,1,2)$，

所以，所求平面方程为 $1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)-3\cdot(z-2)=0$，即 $x+2y-3z+2=0$。

22. 求微分方程 $y''-5y'+6y=e^x(x+1)$ 的通解.

解：特征方程为：$r^2-5r+6=0$，即 $(r-2)(r-3)=0$，得特征根为：$r_1=2, r_2=3$，

故齐次方程的通解为：$Y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）；

设 $y^*=(Ax+B)e^x$，$(y^*)'=Ae^x+(Ax+B)e^x=Axe^x+(A+B)e^x$，

$(y^*)''=Ae^x+Axe^x+(A+B)e^x=Axe^x+(2A+B)e^x$，代入原方程得：

$Axe^x+(2A+B)e^x-5[Axe^x+(A+B)e^x]+6[(Ax+B)e^x]=e^x(x+1)$，

整理得$\begin{cases}2A=1\\2B-3A=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=\dfrac{5}{4}\end{cases}$，所以$y^*=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}\right)e^x$，

因此，方程的通解为：$y=Y+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}\right)e^x$（$C_1$，$C_2$为任意常数）。

23. 求函数$y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{x}$的单调区间和凹凸区间.

解：定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y'=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{x}\right)'=x^2-\dfrac{1}{x^2}$，令$y'=0$得$x=\pm1$，$x=0$

时y'不存在，

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$		$-$		$-$		$+$
y	$\uparrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

单增区间为：$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$；单减区间为：$[-1,0)$，$(0,1]$。

$y''=\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)''=2x+\dfrac{2}{x^3}$，$x=0$时$y''$不存在，没有$y''=0$的点

当$x<0$时，$y''<0$，此时函数为凸的；当$x>0$时，$y''>0$，此时函数为凹的，

因此，凹区间为$(0,+\infty)$，凸区间为$(-\infty,0)$。

四、综合题（本题3个小题，每小题10分，共30分）

24. 已知$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\ (|x|<1)$.

(1)求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$的收敛半径与函数；

(2)求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$的和

解：(1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1}=1$，收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}=1$。收敛中心为$x=0$，收敛区

间为$(-1,1)$。

当$x=1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$发散；当$x=-1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)$发散，

所以收敛域为$(-1,1)$。

令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{x}{1-x}$，　$x\in(-1,1)$。

(2)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 令$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，则

$$\int_0^x S_1(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x},$$

$$S_1(x)=\left[\int_0^x S_1(t)dt\right]'=\left[\frac{x}{1-x}\right]'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=S_1\left(\frac{1}{2}\right)=4$。

25. 曲线$y=\sqrt{x}$与直线$x=t(t>0)$及x轴所围成的平面图形为D，其面积记为S，图形D分别绕x轴，y轴旋转一周所得几何体体积记为V_1，V_2.

(1)当$t=4$时，计算S的值；

(2)当$V_1=V_2$时，求t的值

解：(1)$S=\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2}{3}\cdot 2^3=\frac{16}{3}$；

(2)$V_1=\int_0^t\pi\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\int_0^t\pi x dx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^t=\frac{\pi t^2}{2}$；

$V_2=\int_0^t 2\pi x\sqrt{x}dx=2\pi\int_0^t x^{\frac{3}{2}}dx=2\pi\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^t=\frac{4}{5}\pi t^{\frac{5}{2}}$；

当$V_1=V_2$时，$\frac{\pi t^2}{2}=\frac{4}{5}\pi t^{\frac{5}{2}}$，解得$t=\frac{25}{64}$。

26. 已知$g(x)$是闭区间$[-1,1]$上的连续奇函数，且在开区间$(-1,1)$内可导，设函数$f(x)=\int_{-1}^{x}g(t)dt$，证明：

(1)$f'(0)=0$;

(2)至少存在一点$\xi\in(-1,1)$，使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$;

(3)至少存在一点$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)=g(1)$.

解：(1) $f'(x)=\left[\int_1^x g(t)dt\right]'=g(x)$，则 $f'(0)=g(0)$，由于 $g(x)$ 是在闭区间 $[-1,1]$ 上的连续奇函数，所以 $g(0)=0$，因此 $f'(0)=0$。

(2)令 $F(x)=x\cdot f(x)$，由题知，$F(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$，在开区间 $(-1,1)$ 内可导，

$F(1)=f(1)=\int_{-1}^{1} g(t)dt=0$，$F(-1)=-f(-1)=-\int_{-1}^{-1} g(t)dt=0$，由罗尔定理得，至少存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

(3)令 $G(x)=f'(x)-g(1)x$，由于 $G(x)$ 在闭区间 $[0,1]$，在开区间 $(0,1)$ 内可导，

$G(0)=f'(0)-0\cdot g(1)=f'(0)=0$，

$G(1)=f'(1)-g(1)=\left[\int_{-1}^x g(t)dt\right]'\Big|_{x=1}-g(1)=g(x)\big|_{x=1}-g(1)=g(1)-g(1)=0$，

由罗尔定理得，至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $G'(\eta)=0$，即 $f''(\eta)=g(1)$。

$f'(x_0)=0$。

答案：B

解析：A 是零点定理，C 是最值定理，D 是费马引理。

4. $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{1+\sin x}dx$，$I_2=\int_0^1\left(\frac{e^x}{1+\sin x}\right)^2dx$，$I_3=\int_0^1\left(\frac{e^x}{1+\sin x}\right)^3dx$，则(　　)

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_3<I_1<I_2$　　C. $I_2<I_1<I_3$　　D. $I_3<I_2<I_1$

答案：A

解析：由于 $x\in(0,1)$ 时，$e^x>1+\sin x$，所以 $\frac{e^x}{1+\sin x}>1$，

因此 $\frac{e^x}{1+\sin x}<\left(\frac{e^x}{1+\sin x}\right)^2<\left(\frac{e^x}{1+\sin x}\right)^3$，所以选 A。

5.下列级数发散的是(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

答案：D

解析：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 P 级数，且 $p<1$，所以发散。

非选择部分

注意事项：

1. 用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

2. 在答题纸上作图，可先使用 2B 铅笔，确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描黑。

二、填空题（只需在横线上直接写出答案，不必写出计算过程，本题共有 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分）

6. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x+3})^x=$______.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x+3})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{2}{x+3}}=e^2$。

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$，则极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\sqrt{1+x}-1}=$______.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\frac{1}{2}x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2f'(0)=4$。